UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2017-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 15/12/2017
DACBHCC

EXAMEN FINAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO Y CALCULADORA CIENTIFICA**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **LAS MOCHILAS O MALETINES DEBERÁN DEJARSE EN LA PARTE INFERIOR DE LA PIZARRA**
- **DURACION: 110 MINUTOS**

Problema 1

Dado el siguiente mecanismo de barras, donde $a = 100\ mm,\ b = 120mm,$ $c = 150\ mm$ y $d = 180\ mm$. Esta relación puede ser demostrado geométricamente por la relación entre los ángulos α y β :

$$\left(d - a * \cos(\alpha) - b * cos(\beta)\right)^2 + \left(a * \mathrm{sen}(\alpha) + b * sen(\beta)\right)^2 - c^2 = 0$$

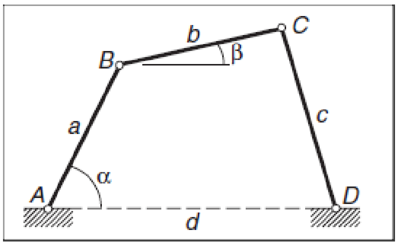

Figura 1

Para cada valor de α obtenemos su respectivo β, según la siguiente tabla

$\alpha\ (^o)$	0	5	10	15
$\beta\ (^o)$	95,0823	88,4303	81,2798	74,0548

Usando una función Spline Natural cúbico, realice lo siguiente:

a) **(2.5ptos)** Si la barra AB rota con un ángulo de α = 5°, y una velocidad angular de 74,54 ^{o}/s (denotada por $\frac{d\alpha}{dt} = 74{,}54\ ^o$/s) determinar la velocidad angular $\frac{d\beta}{dt}$.

b) **(0.5pto)** Para $\alpha = 10°$, aproxime $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$

c) **(1.0pto)** Estime el ángulo β cuando $\alpha = 8°$

d) **(1.0pto)** Usando los comandos de MATLAB resolver (c) utilizando ahora interpolación cúbica.

Problema 2

Se tiene una planta de generación de aire comprimido, basado en el sistema cilindro-pistón (ver Figura 2), accionados por motores de combustión interna.
Se sabe que el modelo matemático para calcular el trabajo para la compresión del aire en un ciclo es:

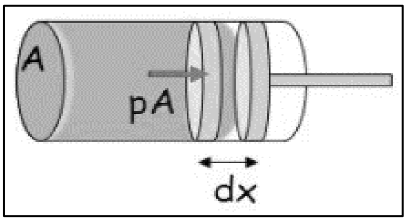

Figura 2

$$dW = Fdx = pAdx = pdV \qquad \therefore W = \int_{v1}^{v2} pdV$$

Si en el proceso de compresión, se considera que la carrera mínima encierra un volumen de 0.5 m^3 y la carrera máxima encierra un volumen de 0.1 m^3 . Se logró registrar los siguientes valores del proceso:

$v(m^3)$	0.5	0.45492	0.3	0.1451	0.1
$p(kPa)$	100	150	250	500	650

Estime el trabajo necesario en kJ para comprimir el aire en cada ciclo.

a) **(2.0 ptos)** Usando el método Gauss-Legendre con 3 puntos.

b) **(2.0 ptos)** Usando el método de Simpson de 1/3.

c) **(1.0 pto)** Usando un programa (Script) en MATLAB aplicando el método del trapecio con un paso de 0.2.

Problema 3

Al aplicar la segunda ley de newton a un sistema masa-resorte con amortiguamiento, tal como se muestra en la Figura 3, se modela mediante la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - \beta\frac{dx}{dt}$$

La masa m=1 kg se libera al inicio de una posición x=1 metro de la posición de equilibrio con velocidad de 1 m/s. Ademas k=4 y β=5. Se pide:

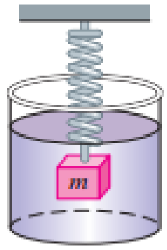

Figura 3

a) **(0.5 pto)** Reducir a un sistema de 2 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden
b) **(2.0 ptos)** Mediante Euler, determine la posición y velocidad a cabo de 0.2 segundos, con incrementos de h=0.05 seg.
c) **(0.5 pto)** Determine el error porcentual para la posición y velocidad en el último punto si la solución analítica es $x(t) = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-4t}$. Comente su respuesta.
d) **(1.0 pto)** Escriba la fórmula para Taylor de orden 2, para este problema.
e) **(1.0 pto)** Escriba comandos de MATLAB para hallar la solución exacta de la posición y la velocidad.

Problema 4

Sea la siguiente ecuación diferencial ordinaria (**EDO**):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t^2}y = 0$$

Con condición de frontera: $y(1) = 1$, $y(2) = 1.25$, se pide:

a) **(1.0 pto)** Realice la distribución de los puntos discretos de la variable independiente t_i , para calcular la solución numérica usando $\Delta t = 0.25$.
b) **(2.0 ptos)** Plantee el sistema de ecuaciones lineales que resulta al aplicar el método de las diferencias finitas en los puntos discretos hallados en a).
c) **(1.0 pto)** Resuelva el sistema lineal anterior, y determine el porcentaje de error cometido al compararlo con la solución exacta, $y(t) = c_1 t + c_2/$t.
d) **(1.0 pto)** Si la condición frontera cambia a $y(2) - 2\dot{y}(2) = \frac{1}{2}$, ¿explique con detalle cómo modificaría el sistema de ecuaciones lineales halladas en b), al usar diferencias finitas?

Los Profesores

SOLUCIONARIO

Solución P1

a) La velocidad angular de BC es:

$$\frac{d\beta}{dt}=\frac{d\beta}{d\alpha}\times\frac{d\alpha}{dt}=74{,}54\times\frac{d\beta}{d\alpha}$$

Para hallar $\frac{d\beta}{d\alpha}$, hallamos la función Spline natural

$\alpha\ (^o)$	$\beta\ (^o)$	[,]
0	95,0823	-1,3304
5	88,4303	-1,4301
10	81,2798	-1,445
15	74,0548	

$$\begin{bmatrix}20 & 5\\ 5 & 20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}-0{,}0997\\ -0{,}0149\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0{,}5982\\ -0{,}0894\end{bmatrix}$$

$$M_1=-0{,}0307\,;\quad M_2=0{,}003208$$

$$a_0=\frac{-0{,}030712}{30}=-0{,}0010237;\quad b_0=0;\quad c_0=-1{,}3048;\quad d_0=95{,}0823$$

	[xi,xi+1]	a	b	c	d
S0	**[0;5]**	**-0,001024**	**0**	**-1,3048**	**95,08**
S1	**[5;10]**	**0,001131**	**-0,01536**	**-1,3816**	**88,43**
S2	**[10;15]**	**-0,0001069**	**0,001604**	**-1,4503**	**81,28**

Para $\alpha=5°$,

$$S_1(\alpha)=0{,}001131(\alpha-5)^3-0{,}01536(\alpha-5)^2-1{,}3816(\alpha-5)+88{,}43$$

$$S'_1(5)=-1{,}3816$$

$\frac{d\beta}{d\alpha}=-1{,}3816$

Por lo tanto:

$$\frac{d\beta}{dt}=\frac{d\beta}{d\alpha}\times\frac{d\alpha}{dt}=74{,}54\times\frac{d\beta}{d\alpha}=74{,}54\times-1{,}3816=\ -102.9845\ ^o\ /\mathrm{s}$$

b) Para $\alpha=10°$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}=M_2=0{,}003208$

c) Para estimar el ángulo β cuando $\alpha=8°$ utilizamos S1

$$S_1(x)=0{,}001131(x-5)^3-0{,}01526(x-5)^2-1{,}3816(x-5)+88{,}43$$

$$S_1(8)=84.1784^o$$

d) X=[0:5:10]

```
Y=[95,0823 88,4303 81,2798 74,0548]
Pol=polyfit(X,Y,3)
Value=polyval(Pol,8)
```

Solución P2
Parte a)
Como la integral a aplicar es:

$$W = \int_{0.1}^{0.5} pdV$$

aplicamos las siguientes formulas,

$$\boldsymbol{x_i = a + (x_{Li} + 1)\frac{b-a}{2}}$$

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx \approx (c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \cdots \ldots c_ny_n)\left(\frac{b-a}{2}\right)}$$

Xleg[-1,1]	C	X[a,b]	f(X[a,b])	c*f(x)
-0.7745967	0.5555556	0.145081	500	277.7778
0	0.8888889	0.3	250	222.2222
0.77459667	0.5555556	0.454919	150	83.33333
			Total=	583.3333
			Iaproximada=	116.6667

Por lo tanto el trabajo requerido por cada ciclo es de W=116.6 kJ
Parte b)
Aplicando la fórmula de Simpson de 1/3
A0=(y0+4y1+y2)h/3

		Grado n=2	
X	Yi	Ci	Ci*Yi
0.1	650	1	650
0.3	250	4	1000
0.5	100	1	100
		Total=	1750
		Int_Aproximada=	116.6666667

Por lo tanto el trabajo requerido por cada ciclo es de W=116.6 kJ
Parte c)

```
h=0.2
c=[1 2  1]
y=[650 250 100]
I=(c*y')*h/2
fprintf('El trabajo es %.2f\n',I);
```

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA P.A. 2017-2
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA 15/12/2017
DACBHCC

Solución P3

a)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+4x=0 \quad x(0)=1 \quad x'(0)=1$$

$$\frac{dx}{dt}=v \qquad x(0)=1$$

$$\frac{dv}{dt}=-5v-4x \quad v(0)=1$$

b)

Aplicando Euler:

$$t_0=0 \quad x_0=1 \quad v_0=1 \quad h=0.05$$

$$t_{n+1}=t_n+h$$

$$x_{n+1}=x_n+hv_n$$

$$v_{n+1}=v_n+h(-5v_n-4x_n)$$

tn	xn	vn
0	1.0000	1.0000
0.0500	1.0500	0.5500
0.1000	1.0775	0.2025
0.1500	1.0876	-0.0636
0.2000	1.0844	-0.2652

c) xexacta = 1.0650 vexacta = -0.1663

xEuler = 1.0844 vEuler = -0.2652

ErrorX = 1.8258% ErrorV = 59.4581 %

Error de la posicion es aceptable, mientras que la velocidad presenta mucha inestabilidad.

d) Taylor 2

$$t_0=0 \quad x_0=1 \quad v_0=1 \quad h=0.1$$

$$t_{n+1}=t_n+h$$

$$x_{n+1}=x_n+hv_n+\frac{h^2}{2}v_n{}'$$

$$x_{n+1}=x_n+hv_n+\frac{h^2}{2}(-5v_n-4x_n)$$

$$v_{n+1}=v_n+h(-5v_n-4x_n)+\frac{h^2}{2}\left(-5v_n{}'-4x_n{}'\right)$$

$$v_{n+1}=v_n+h(-5v_n-4x_n)+\frac{h^2}{2}(-5(-5v_n-4x_n)-4v_n)$$

$$v_{n+1}=v_n+h(-5v_n-4x_n)+\frac{h^2}{2}(21v_n+20x_n)$$

e)

MATLAB

```
X=dsolve('D2x+5*Dx+4*x=0','x(0)=1','Dx(0)=1')
dX=diff(X)
```

Solución P4

a) $h = \Delta t = 0.25 \quad , N = \frac{2-1}{h} = 4$

$t_i = t_0 + i * h$, i=0,1,4

$y_0 = 1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $y_4 = 1.25$

$t_0 = 1$ $\quad t_1$=1.25 $\quad t_2$=1.5 $\quad t_3$=1.75 $\quad t_4$=2.0

b)

$$\ddot{y}_i = -\frac{1}{t}\dot{y}_i + \frac{1}{t^2}y_i$$

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = -\frac{1}{t_i}\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \frac{1}{{t_i}^2}y_i$$

i=1,2,3

$$\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{0.25^2} = -\frac{1}{t_1}\frac{y_2 - y_0}{0.5} + \frac{1}{{t_1}^2}y_1$$

$$\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{0.25^2} = -\frac{1}{t_2}\frac{y_3 - y_1}{0.5} + \frac{1}{{t_2}^2}y_2$$

$$\frac{y_2 - 2y_3 + y_4}{0.25^2} = -\frac{1}{t_3}\frac{y_4 - y_2}{0.5} + \frac{1}{{t_3}^2}y_3$$

$$\begin{bmatrix} -2.04 & 1.1 & 0 \\ 0.9167 & -2.0278 & 1.0833 \\ 0 & 0.9286 & -2.024 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ 0 \\ -1.3393 \end{bmatrix}$$

c) Solución del sistema Lineal:

$y_0 = 1 \quad y_1 = 1.0257 \quad y_2 = 1.0839 \quad y_3 = 1.1611 \quad y_4 = 1.25$

$t_0 = 1$ $\quad t_1$=1.25 $\quad t_2$=1.5 $\quad t_3$=1.75 $\quad t_4$=2.0

Solución exacta:

$$y(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2\mathrm{t}}$$

$y(t_0) = 1 \quad y(t_1) = 1.025 \quad y(t_2) = 1.0833 \quad y(t_3) = 1.1607 \quad y(t_4) = 1.25$

Error $= \frac{\|y - y(t)\|_2}{\|y(t)\|_2} = 3.8573e - 04 \rightarrow \quad 0.039\%$

d.) $C.F$: $\qquad y(2) - 2\dot{y}(2) = \frac{1}{2}$

$y_0 = 1$ $\quad y_1$ $\quad y_2$ $\quad y_3$ $\quad y_4$ $\quad y_f$

$t_0 = 1$ $\quad t_1$=1.25 $\quad t_2$=1.5 $\quad t_3$=1.75 $\quad t_4$=2.0 $\quad t_f$

Se agregaría otra ecuación para i=4

$$\frac{y_3 - 2y_4 + y_f}{0.25^2} = -\frac{1}{t_3}\frac{y_f - y_3}{0.5} + \frac{1}{{t_3}^2}y_4$$

$y(2) - 2\dot{y}(2) = \frac{1}{2}$ ➔ $y_4 - 2\left(\frac{y_f - y_3}{2h}\right) = \frac{1}{2}$ ➔ $y_f = y_3 + hy_4 - \frac{h}{2}$

Arreglando ecuación:

$$\frac{y_3 - 2y_4 + (y_3 + hy_4 - \frac{h}{2})}{0.25^2} = -\frac{1}{t_3}\frac{\left(y_3 + hy_4 - \frac{h}{2}\right) - y_3}{0.5} + \frac{1}{{t_3}^2}y_4$$

Dando valores:

$2y_3 - 1.75y_4 = 0.1328$

Esta última ecuación se agregaría al sistema en b) ya que y_4 no es fijo si no una variable.